Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 11
Prof. Dr. G.Wang — 27.Juli 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien (M_i, g_i) $(i = 1, 2)$ zwei zweidimensionale Flächen mit Riemannschen Metriken g_i, und (N, h) eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiter sei $\phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ ein Diffeomorphismus mit $\phi^*(g_2) = g_1$ (d.h. speziell ist ϕ ein konformer Diffeomorphismus). Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Sei $u : M_2 \to N$ eine glatte Abbildung. Dann gilt

$$\mathcal{E}(u \circ \phi) = \mathcal{E}(u).$$

ii) Falls $u : M_2 \to N$ eine harmonische Abbildung ist, dann ist $u \circ \phi : M_1 \to N$ auch eine harmonische Abbildung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ und $\mathbb{S}^2$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Eine Abbildung $u : B \to \mathbb{S}^2$ heißt *axialsymmetrisch* (*axially symmetric*), falls

$$u(x) = (\frac{x}{r} \sin \varphi(r), \cos \varphi(r))$$

für eine Funktion $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $r(x) := |x|$. Weisen Sie nach:

i) u ist genau dann eine harmonische Abbildung, wenn φ der Gleichung

$$\varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = 0 \tag{1}$$

genügt.

ii) Für eine beliebige Konstante $\lambda \in (0, \infty)$ ist die Funktion

$$\phi_\lambda(r) := \arccos \left(\frac{\lambda^2 - r^2}{\lambda^2 + r^2} \right)$$

eine Lösung von (1).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine Abbildung $u \in W^{1,2}(M, N)$ heißt *schwache harmonische Abbildung*, falls

$$\int Du \cdot D\phi = \int A(u)(Du, Du)\phi$$

(bitte wenden!)

für beliebige Abbildungen $\phi \in C_c^\infty(M, N)$ gilt. Zeigen Sie: $u : B^n \to \mathbb{S}^{n-1} \quad (n \geq 3)$ definiert durch $u(x) := \frac{x}{|x|}$ ist eine schwache harmonische Abbildung.
(*Hinweis:* Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe 3, Serie 10.)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 03.08.2011 bis 8:15 Uhr.