Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 2
Prof. Dr. G.Wang — 11.Mai 2011
Florian Link

Aufgabe 1 *(Harnack-Ungleichung auf Ω)* (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u)+qu = 0$ mit $|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$ und $\|q\|_{L^r(\Omega)} \leq \Gamma$ für ein $r > n/2$. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u \geq 0$ schwache Lösung von $Lu = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u \qquad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega$$

gilt, wobei $c = c(n, \Omega, \Omega', \Lambda, r, \Gamma)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei nun $L := -\Delta$. Als Spezialfall von Satz 1.3 gilt für eine Superlösung von L, d.h. $Lu \geq 0$ mit $u \geq 0$, die Abschätzung

$$\inf_{B_{1/2}} u \geq c\left(\fint_{B_1} u^p\, dx\right)^{1/p} \qquad \text{für } 0 < p < \frac{n}{n-2}$$

mit $c = c(n, p)$. Die Notwendigkeit der Voraussetzung $p \neq \frac{n}{n-2}$ soll durch die folgenden Übungsaufgaben nachgewiesen werden. Beweisen Sie:

a) Für $n \geq 3$ und eine natürliche Zahl $k > 0$ definiert

$$u_k(x) := \min\{|x|^{2-n}, k\}$$

eine positive (schwache) Superlösung $u_k \in W^{1,2}(B)$ von $-\Delta$ auf B.
Hinweis: Vergleichen Sie die Aussage mit der von Serie 1, Aufgabe 2.

b) Für $n \geq 3$ und u_k aus a) gelten

$$\inf_{B_{1/2}} u_k = 2^{n-2} \quad \text{für } k \geq k_0(n)$$

und

$$\int_{B_1} u_k^{\frac{n}{n-2}} dx \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

c) Wie sieht ein sinnvolles Analogon des Beispiels aus a) und b) für den Fall $n = 2$ aus?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 18.05.2011 bis 8:15 Uhr.