Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 3
Prof. Dr. G.Wang — 18.Mai 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u \geq 0$ (fast überall) eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \qquad \text{mit } 1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ erfülle $Lu \leq 0$, wobei

$$Lu = -\partial_j\big(a^{ij}(x)\partial_i u(x)\big)$$

mit $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ auf Ω. Sei nun $B_{R_0}(x_0)$ eine Kugel mit $B_{4R_0}(x_0) \subset \Omega$ und

$$\sup_{B_{R_0}(x_0)} u = \sup_\Omega u.$$

Zeigen Sie, dass dann $u \equiv M$ in $B_{2R_0}(x_0)$ gilt.
Hinweis: Wenden Sie Satz 1.3 auf $\sup u + \varepsilon - u$ an und lassen Sie dann $\varepsilon \searrow 0$ gehen.

b) Weisen Sie nach: Jede auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte, beschränkte (schwache) Lösung von $Lu = 0$ (L wie oben) ist konstant.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 25.05.2011 bis 8:15 Uhr.