Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 4
Prof. Dr. G.Wang — 25.Mai 2011
Florian Link

Gegeben sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sowie $u \in C^\infty(M)$ mit $u > 0$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals

$$\mathcal{F}_g : u \mapsto \mathcal{F}_g(u) := \frac{\int_M c(n)|Du|_g^2 + S_g u^2 \, dv_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

d.h. berechnen Sie

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$$

für beliebiges $\varphi \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\widetilde{g} := u^{\frac{4}{n-2}} g$. Der Laplace(-Beltrami)-Operator bzgl. g, Δ_g, einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist definiert durch

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l}\Big).$$

a) Beweisen Sie die Transformationsformel

$$\Delta_{\widetilde{g}} f = u^{-\frac{4}{n-2}} \big(\Delta_g f + 2D(\log u) \cdot \operatorname{grad}_g f\big).$$

b) Benutzen Sie die Formel $S_{\widetilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}}\big(-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u + S_g u\big)$ um zu zeigen, dass

$$L_{\widetilde{g}}(f) := u^{-\frac{4}{n-2}} L_g(f \cdot u),$$

wobei $L_g f := -4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g f + S_g f$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 01.06.2011 bis 8:15 Uhr.