Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 5
Prof. Dr. G.Wang — 01.Juni 2011
Florian Link

Aufgabe 1 *(Methode der Oberlösung/Unterlösung)* (4 Punkte)
Sei Σ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$-\Delta u + 2K = -2e^u \quad \text{auf } \Sigma.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung eine Lösung besitzt, falls $K < 0$ ist.

Aufgabe 2 *(Koflächenformel)* (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Für fast alle $t \in \mathbb{R}$ sei die Menge $f^{-1}\{t\}$ eine glatte, $(n-1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u|Df| d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\{f=t\}} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \Big) dt.$$

Sei nun $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u \geq 0$. Beweisen Sie:

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} = \Big(\int_0^\infty \frac{n}{n-1} t^{\frac{1}{n-1}} v(t) \, dt \Big)^{\frac{n-1}{n}},$$

wobei $v(t) := \mathcal{L}^n\{u > t\}$.

Definition: Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N. Sei g eine Riemannsche Metrik auf N. Die durch f zurückgezogene (Riemannsche) Metrik f^*g ist durch

$$(f^*g)(X, Y) = g(f_*X, f_*Y) \qquad \forall \, X, Y \in TM$$

definiert.

Aufgabe 3 *(Konforme Metrik)* (4 Punkte)
Sei $\rho : \mathbb{S}^n \backslash \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion, d.h.

$$\rho : (x_1, \dots, x_{n+1}) \to \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Sei $g_{\mathbb{S}^n}$ die Standardmetrik (d.h. die erste Fundamentalform) auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $g_{\mathbb{R}^n}$ die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$(\rho^{-1})^* g_{\mathbb{S}^n} = u^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathbb{R}^n} \text{ mit } u(x) = \Big(\frac{2}{1 + |x|^2} \Big)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Aufgabe 4 *(Diffeomorphieinvarianz)* (4 Punkte)
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\phi : M \to M$ ein Diffeomorphismus und $\widetilde{g} = \phi^* g$ die zurückgezogene Metrik. Zeigen Sie:

$$Q_{\phi^* g}(u \circ \phi) = Q_g(u)$$

und

$$V_{\phi^* g}(u \circ \phi) = V_g(u),$$

wobei Q, V wie in der Vorlesung definiert seien.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 08.06.2011 bis 8:15 Uhr.