Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 6
Prof. Dr. G.Wang — 08.Juni 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu $p \in M$ gibt es ein Koordinatensystem $\varphi : B_{\rho_o}(0) \to U \subset M$ mit $\varphi(0) = p$ und $\varphi^* g = (g_{ij})$. Betrachten Sie die Transformation $T_\rho : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to B_R(0)$, $T_\rho(x) := \rho x$ $(\rho > 0)$ sowie $\varphi_\rho(x) := \varphi \circ T_\rho(x) = \varphi(\rho x)$ für $\rho \in (0, \rho_0)$. $B_1(0)$ sei mit der Metrik $g^\rho := \rho^{-2}\varphi_\rho^* g$ ausgestattet. Zeigen Sie:

$$g_{ij}^\rho(x) = g_{ij}(\rho x).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei

$$Q_g(u) = \int_M (c(n)|Du|^2 + S_g u^2)\, d\mu_g$$

und

$$V_p(u) = \int_M |u|^p\, d\mu_g$$

für

$$1 < p < \frac{2n}{n-2}.$$

a) Weisen Sie die Existenz einer Funktion $0 \le u \in W^{1,2}(M)$ mit

$$Q_g(u) = \inf\{Q_g(w),\ w \in W^{1,2}(M) \text{ und } V_p(w) = 1\}$$

nach.

b) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von Q_g unter der Nebenbedingung $V_p(u) = 1$.

c) Zeigen Sie: Es gilt $u \in C^\infty(M)$ und $u > 0$.
Hinweis: Aufgabe 1 von Serie 3 könnte eine Hilfe sein.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 22.06.2011 bis 8:15 Uhr.