Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 7
Prof. Dr. G.Wang — 22.Juni 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Es gibt eine stetige Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2} =: n^*$ und $n \geq 3$. Für $n = 2$ wäre $n^* = \infty$. Ist

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

richtig? (Hinweis: Betrachten Sie $\Omega := B_1(0)$ mit $u(x) := \log(1 - \log|x|)$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie für eine Konstante $\rho \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$u \mapsto J_\rho[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \rho \log \int_\Omega e^u dx$$

auf $W_0^{1,2}(\Omega)$.

a) Berechnen Sie die Euler-Langrange-Gleichung von J_ρ.

b) Der *Satz von Moser-Trudinger* besagt: Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$J_{8\pi}[u] \geq -c \qquad \text{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass das Funktional J_ρ für $0 < \rho < 8\pi$ koerziv ist und weisen Sie die Existenz einer Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$J_\rho[u] = \inf_{w \in W_0^{1,2}(\Omega)} J_\rho[w]$$

nach.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die *Liouville-Gleichung*

$$-\Delta u = e^u.$$

Zeigen Sie: Falls u eine Lösung ist, ist die durch

$$\widetilde{u}(x) := u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 2\log(|x|^2)$$

definierte Funktion auch eine Lösung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 06.07.2011 bis 8:15 Uhr.