Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 8
Prof. Dr. G.Wang — 06.Juli 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q d\mathcal{L}^n = 1$, wobei $q = \frac{np}{n-p}$ für $1 < p < n$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ordnen wir ein $\rho(x) \in \mathbb{R}_+$ zu mit $\int_{B_{\rho(x)}(x)} |f|^q d\mathcal{L}^n = \frac{1}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ derart existiert, so dass

$$\rho(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(x).$$

b) Betrachten Sie die Reskalierungen

$$\bar{f}(x) := \rho(x_0)^{n/q} f(x_0 + \rho(x_0)x).$$

Zeigen Sie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_1(x)} |\bar{f}|^q d\mathcal{L}^n = \int_{B_1(0)} |\bar{f}|^q d\mathcal{L}^n = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Prüfen Sie nach, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(x) := \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 |x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

die Differentialgleichung

$$-\Delta u = (n-2)n u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt mit $\int |Du_\varepsilon|^2 d\mathcal{L}^n = a$ und $\int |u_\varepsilon|^q d\mathcal{L}^n = b$, wobei a und b Konstanten und $q = \frac{2n}{n-2}$. Es gelte

$$\nu_\varepsilon := \mathcal{L}^n \llcorner |u_\varepsilon|^q \to \nu \quad \text{und} \quad \mu_\varepsilon := \mathcal{L}^n \llcorner |Du_\varepsilon|^2 \to \mu$$

(im Sinne von Radonmaßen). Bestimmen Sie ν und μ.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel, so dass in Satz 3.5 aus der Vorlesung strikte Ungleichheit gilt, d.h., dass gilt

$$\mu > \mathcal{L}^n \llcorner |Du|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 13.07.2011 bis 8:15 Uhr.