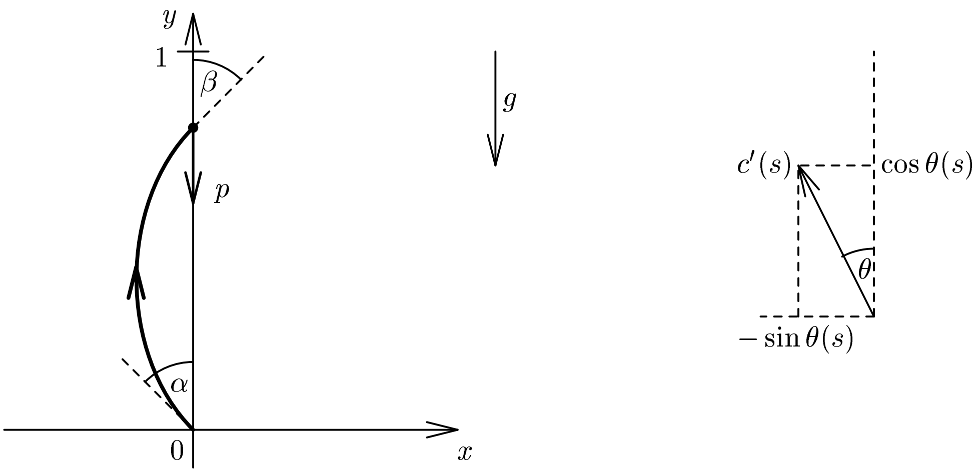
MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. T. Müller

23. Juni 2000

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2000
Übungsblatt 6

AUFGABE 1: (*Eulerscher Knickstab*)
Ein elastischer Stab der Länge Eins sei mit dem einen Ende drehbar im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ gelagert, das andere Ende sei frei beweglich auf der positiven y-Achse. Durch Anhängen eines Gewichtes $p = mg > 0$ werde der Stab verbogen:



Wir beschreiben den Stab durch eine längentreue Abbildung $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, c(s) = (x(s), y(s))$ und $|c'(s)| = 1$, mit den Randbedingungen $x(0) = y(0) = 0$, $x(1) = 0$. Die potentielle Energie des Systems ist Summe der Biegeenergie des Stabes und der Lageenergie des Gewichtes, das heißt

$$E(c) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \kappa(s)^2 ds + py(1),$$

wobei $\kappa(s) = |c''(s)|$ die Krümmung und $\sigma > 0$ eine Konstante (abhängig von Material und Querschnitt des Stabes) ist.
Wir machen den Ansatz

$$c(s) = \int_0^s (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))dt,$$

wobei $\theta(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der gegen den Uhrzeigersinn gemessene Winkel ist, den c' mit der positiven y-Achse einschließt. Als Funktion von θ erhalten wir

$$E(\theta) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \theta'(s)^2 ds + p \int_0^1 \cos\theta(s) ds,$$

und die Randbedingung lautet

$$\int_0^1 \sin\theta(s)ds = 0.$$

(1) Zeigen Sie, daß eine Gleichgewichtslage durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \theta'' + \lambda^2 \sin\theta &= 0 \qquad (\lambda^2 = \frac{p}{\sigma} > 0) \\ \theta'(0) = \theta'(1) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben wird.

(2) Die Funktion $\theta(s) \equiv 0$ ist die triviale Lösung. Untersuchen Sie, für welche λ (bzw. für welche Knicklasten $p = \sigma\lambda^2$) Verzweigung auftritt und zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm.

AUFGABE 2:
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\Delta u + \lambda g(u) = 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

unter den Annahmen $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, $g''(0) = 0$ und $g'''(0) \neq 0$. Skizzieren Sie die Verzweigungskurve bei einem einfachen Eigenwert $\mu = \lambda_0 g'(0) > 0$ von $-\Delta$, je nach Vorzeichen von $g'''(0)$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 03.07.2000