MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. T. Müller

18. Juli 2000

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2000
Übungsblatt 7

AUFGABE 1: Gegeben sei das Funktional

$$I(u) := \int_0^1 (x - u^3)^2 u'^6 \, dx$$

und die Menge

$$A := \{u \in C^{0,1}([0,1]) | u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 1\}.$$

Man zeige:

(a) Es seien $0 < \alpha < \beta < 1$ gegeben. Dann existiert eine von α und β unabhängige Konstante $c_0 > 0$, so daß gilt:

$$I(u) \geq \frac{7^2}{2^6} \int_\alpha^\beta x^2 u'^6 \, dx \geq c_0$$

für $u \in C^{0,1}([0,1])$ mit $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$, $u(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}$ und $u(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}$.
Hinweis: Transformieren Sie das rechte Integral, so daß der Integrand nur $(u')^6$ lautet und verwenden Sie die Jensen'sche Ungleichung.

(b) Für jede Funktion $u \in C^{0,1}([0,1])$ mit $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ existieren $0 < \alpha < \beta < 1$ mit $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$ und $u(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}$, $u(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}$.

(c) $\inf\{I(u) | u \in A\} > \inf\{I(u) | u \in H^{1,1}((0,1))$ mit $u(0) = 0$ und $u(1) = 1\}$. (Dies nennt man "Lavrentiev-Phänomen").

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 10.07.2000