MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. T. Müller

10. Juli 2000

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2000
Übungsblatt 8

AUFGABE 1: Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe.

a) Zeigen Sie, daß die Menge $W^{1,2}(\mathbb{R}^2, S^2) = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) : |u(x)| = 1 \text{ fast überall}\}$ unter schwacher Konvergenz in $W^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ abgeschlossen ist.

b) Begründen Sie, daß das Funktional

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_B |Du|^2 dx + \lambda \int_B \langle u, \partial_1 u \times \partial_2 u \rangle dx.$$

unterhalbstetig bzgl. dieser Konvergenz ist, falls $|\lambda| \leq 1$.

c) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit im Fall $|\lambda| > 1$.

AUFGABE 2: Es sei $I = (0,1)$. Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$ die Funktionale

$$F(u) := \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 dx \quad \text{und} \quad G(u) := \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 + u^2 dx.$$

unter Nullrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$.

a) Zeigen Sie, daß $\inf F = 0$ und geben Sie eine unendliche Folge von Minimierern an.

b) Ebenso gilt $\inf G = 0$, aber das Infimum wird nicht angenommen.

c) Keines der beiden Funktionale F und G ist unterhalbstetig bzgl. $u_k \to u$ gleichmäßig auf I, $Du_k \to Du$ schwach$*$ in $L^\infty(I) = L^1(I)'$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 17.07.2000