Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 02, Serie 1
Prof. Dr. E. Kuwert — 16. April 2002

Aufgabe 1 *(p-Normen)*
Sei $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\right)^{1/p}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \geq 1$. Beweisen Sie für $p < q$ die Ungleichungen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q}\,\|x\|_q.$$

Sind diese Abschätzungen optimal? Zeigen Sie weiter $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ und skizzieren Sie die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p < 1\}$ in den Fällen $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty$.

Aufgabe 2 *(Stetigkeit und Urbilder)*
Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume sowie $\Omega \subset X$ offen. Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : \Omega \to Y$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist stetig.

(2) Für alle offenen $V \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X.

Aufgabe 3 *(Abschluss und Inneres)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\mathrm{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$ für alle offenen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $\partial(\partial M) = \partial M$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 *(Stetige Bilder kompakter Mengen)*
Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Folgern Sie, dass dann auch $f(K) \subset Y$ kompakt ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 23.4.2002 bis 9:15.