Aufgabe 1 *(Eine Flächenformel)*
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c F \cdot ds$ für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x),$$

wobei der Weg c jeweils eine geeignete Parametrisierung des Randes der folgenden Gebiete in $\mathbb{R}^2$ ist:

(a) Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, (x_1,y_1) und (x_2,y_2).

(b) Ellipse mit den Halbachsen $a,b > 0$.

(c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$, wobei $f \in C^1([a,b])$ mit $f \geq 0$.

Aufgabe 2 *(Zentralkraftfelder)*
Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ F(x) = f(r)x \quad \text{mit } r(x) = |x|$$

eine Stammfunktion.

Aufgabe 3 *(Kettenlinie)*
Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f : [-b,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = a\cosh\frac{x}{a}, \quad \text{wobei } a > 0.$$

Aufgabe 4 *(Polarwinkel auf $\mathbb{R}^2$)*
Geben Sie auf $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_0^+$ eine Stammfunktion φ des Winkelfeldes W an, wobei

$$W(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

Die Gleichung $\operatorname{grad}\varphi = W$ ist dabei nachzuweisen.

Aufgabe 5 *(Konstruktion einer Stammfunktion)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. $0 \in \Omega$, und sei $F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für alle $1 \leq i,j \leq n$. Für $x \in \Omega$ setzen wir

$$c_x : [0,1] \to \Omega,\ c_x(t) = tx.$$

Zeigen Sie explizit (ohne Satz 3.2 der Vorlesung zu verwenden), dass wie folgt eine Stammfunktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ von F gegeben ist:

$$\varphi(x) = \int_{c_x} F \cdot ds = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt.$$

Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 2.7.2002 bis 9:15.