
Aufgabe 1 *(Konjugiert harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, das heißt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{auf } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ gibt mit $\operatorname{grad} v = J \operatorname{grad} u$, wobei $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um $\pi/2$ bezeichnet.

Aufgabe 2 *(Beispiel zum Umkehrsatz)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x + y + e^x, y^3)$$

bijektiv ist. Ist f ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 3 *(Zahl der Urbilder)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Es gelte

(1) f ist stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar.

(2) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in \Omega$.

(2) $y \notin f(\partial\Omega)$.

Zeigen Sie, dass die Menge $f^{-1}\{y\}$ der Urbilder von y endlich ist. Illustrieren Sie, dass keine der Voraussetzungen (1), (2) oder (3) weggelassen werden kann.

Aufgabe 4 *(Inversion von Matrizen)*
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass, die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X) \neq 0\}$ offen ist. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \phi(A) = A^{-1}$$

und schließen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 5 *(Rotationsfreie Felder auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$)*
Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) F hat eine Stammfunktion $\varphi : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$.

(2) Für $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt $\int_c F \cdot ds = 0$.

Anleitung: $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist Vereinigung der beiden sternförmigen Gebiete $\Omega^\pm = \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_0^\pm$, also gibt es dort Stammfunktionen $\varphi^\pm : \Omega^\pm \to \mathbb{R}$.

Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 9.7.2002 bis 9:15.