Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 02, Serie 12
Prof. Dr. E. Kuwert — 10. Juli 2002

Aufgabe 1 *(Rechnen)*
Berechnen Sie die Determinante von $Df(x)$ für die folgenden C^∞ Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Für welche Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ ist die Determinante von $Df(x)$ nicht Null? Sei $\Delta = f(\mathbb{R}^2)$. Falls $f : \mathbb{R}^2 \to \Delta$ injektiv ist, berechnen Sie die Inverse $g : \Delta \to \mathbb{R}^2$.

$a) f(x,y) = (x+2y, x-y)$,
$b) f(x,y) = (x^2 - x - 2, 3y)$,
$c) f(x,y) = (1+y, 2+x^3)$,

Aufgabe 2 *(Nicht Injektiv)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\cos y \exp x, \sin y \exp x).$$

a)Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
b)Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Df(x,y)$ invertierbar ist.
c)Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.
Widerspricht dass dem Inverse Funktion Satz?

Aufgabe 3 *(Ein globaler Diffeomorphismus)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gelte

$$\langle Df(x)v, v\rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass $f : \Omega \to f(\Omega) = \Omega^*$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.
Hinweis: Betrachten Sie für die Injektivität $\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0\rangle$.

Aufgabe 4 *(Lipschitzstetige Umkehrabbildungen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es gebe ein $\mu > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \mu\, |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

(a) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in \Omega$.

(b) Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Hinweis: Zeigen Sie bei (b) für die Surjektivität, dass das Bild $f(\mathbb{R}^n)$ offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. Daraus folgt mit einer Anwesenheitsübung $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Es sind keine Punkte von diesen Aufgaben zu bekommen. Lösungen werden nächste Woche in den Übungsgruppen besprochen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 9.7.2002 bis 9:15.