Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 02, Serie 2
Prof. Dr. E. Kuwert — 25. April 2002

Aufgabe 1 *(Gleichmäßige Konvergenz)*
Untersuchen Sie auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x(1-x)^n$.

(b) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = nx(1-x)^n$.

Aufgabe 2 *(Majorantenkriterium für Funktionenreihen)*
Gegeben sei eine Folge $f_k \in C^0(D)$, $k \in \mathbb{N}$, stetiger Funktionen auf der kompakten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf D.

Aufgabe 3 *(p-Normen auf $C^0(I)$)*
Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Beweisen Sie für $f, g \in C^0(I)$, $I = [0,1]$ folgende Aussagen:

(a) $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$ (Höldersche Ungleichung).

(b) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungleichung).

(c) $\|f\|_p \leq |I|^{1/p-1/q} \, \|f\|_q$ für $p < q$.

Dabei ist $|\langle f,g\rangle| = \int_I fg$ und $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$.

Aufgabe 4 *(Kompaktheit der orthogonalen Matrizen)*
Beweisen Sie, dass die Gruppe der orthogonalen Matrizen

$$\mathrm{O}_n = \{T \in \mathbb{R}^{n\times n} : {}^tTT = \mathrm{E}_n\}$$

eine kompakte Teilmenge des Raums $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Verwenden Sie zum Beispiel die Euklidische Norm $|T| = (\mathrm{tr}\, {}^tTT)^{1/2} = (\sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}^2)^{1/2}$.

Aufgabe 5 *(Folgenraum l^2)*
Betrachten Sie die Menge der Folgen

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_k \in \mathbb{C},\ \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} < \infty\}.$$

Überlegen Sie, l^2 ein normierter Vektorraum ist und zeigen Sie, dass die abgeschlossene Kugel $\{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ nicht kompakt ist. Argumentieren Sie dazu mit der Folge $e_1, e_2, \ldots$, wobei $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in l^2$ an der k-ten Stelle eine Eins hat und sonst nur Nullen. Beweisen Sie schließlich, dass l^2 ein Banachraum, also vollständig ist (*dies freiwillig*).

Es sind vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 30.4.2002 bis 9:15.