
Aufgabe 1 *(Berechnung und Konvergenz der Fourierreihe)*
Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f(x) = |\sin x|$. Konvergiert die Reihe punktweise bzw. gleichmäßig gegen f?

Aufgabe 2 *(Anwendung der Besselsche Ungleichung)*
Zeigen Sie, dass für eine 2π-periodische und stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)e^{-ikx}\,dx = 0.$$

Hinweis. Überlegen Sie, dass $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ vorausgesetzt werden kann. Interpretieren Sie dann das Integral als Fourierkoeffizient einer geeigneten Funktion.

Aufgabe 3 *(Orthonormale Funktionen)*
Betrachten Sie auf dem Raum $C^0([-1,1])$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 fg.$$

Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums V_2 der Polynome vom Grad höchstens zwei, also $V_2 = [1, x, x^2]$.
Hinweis. Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren.

Aufgabe 4 *(Ebene Wellen: Umgang mit partiellen Ableitungen)*
Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, $c > 0$ und $k \in \mathbb{R}^n$ mit $c^2 = |k|^2$ die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u(t,x) = f(\langle k, x\rangle - ct) + g(\langle k, x\rangle + ct)$$

eine Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$ ist, wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$.

Aufgabe 5 *(Modellierung: Parametrisieren einer Kurve)*
Ein Kreis mit Radius Eins rolle auf der x-Achse im $\mathbb{R}^2$ in positiver Richtung ab. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich sein Mittelpunkt bei $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie die Bahn des Punkts auf der Kreislinie, der zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt ist und fertigen Sie eine Skizze an.

Es sind vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 14.5.2002 bis 9:15.