Aufgabe 1 *(Orthogonales Komplement)*
Sei V der Unterraum der trigonometrischen Polynome im Raum X der 2π-periodischen, stückweise stetigen Funktionen, und sei $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$. Bestimmen Sie die Menge

$$V^{\perp} := \{f \in X : \langle f, g\rangle = 0 \text{ für alle } g \in V\}.$$

Ist X direkte Summe von V und $V^{\perp}$?
Hinweis: Für die letzte Frage können Sie das Ergebnis von Aufgabe 5, Serie 3 verwenden.

Aufgabe 2 *(Ausgleichsgerade)*
Die Ausgleichgerade $y = ax + b$ zu den Messdaten $\{(x_k, y_k) : k = 1, \ldots, N\}$ ist dadurch bestimmt, dass der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Quadratsumme

$$f(a, b) := \sum_{k=1}^{N} (ax_k + b - y_k)^2$$

minimiert. Begründen Sie, dass es einen solchen Punkt gibt und berechnen Sie ihn.

Aufgabe 3 *(Zur Vertauschung der partiellen Ableitungen)*
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f(0, 0)$ und $\partial_2\partial_1 f(0, 0)$ existieren, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 4 *(Parameterabhängiges Integral)*
Begründen Sie die Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(r) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos t + r^2)\, dt,$$

und folgern Sie $f \equiv 0$.

Von Serie 4 wird nur die Bearbeitung von drei der fünf Aufgaben verlangt - ich bin mit dem Feiertag etwas durcheinander geraten. Falls vier Aufgaben bearbeitet worden sind, wird das natürlich angerechnet. Jetzt sind wieder alle vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 21.5.2002 bis 9:15.