Aufgabe 1 *(Eulersche Identität)*
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $f \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0$ (i.e. f ist homogen vom Grad α).

(2) $Df(x)x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis. Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 2 *(Produktregel)*
Die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ seien im Punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Beweisen Sie die Produktregel: $fg : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls in x_0 differenzierbar und es gilt

$$D(fg)(x_0) = Df(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, Dg(x_0).$$

Aufgabe 3 *(Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$)*
Bestimmen Sie für die Abbildung

$$f : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ f(r, \vartheta, \varphi) = r(\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$$

die Jacobimatrix. Skizzieren Sie die durch einen Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ verlaufenden Koordinatenlinien $r \mapsto f(r, \vartheta, \varphi)$, $\vartheta \mapsto f(r, \vartheta, \varphi)$ und $\varphi \mapsto f(r, \vartheta, \varphi)$, und zeichnen Sie die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ ein. Berechnen Sie schließlich die Skalarprodukte $g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle$, $1 \le i, j \le 3$, dieser Ableitungen.

Aufgabe 4 *(Ableitung von* det*)*
Begründen Sie, dass die Abbildung *det*

$$det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R},\ A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

differenzierbar ist, und bestätigen Sie für die Ableitung an der Stelle E_n (Einheitsmatrix) folgende Formel:

$$Ddet(E_n)(H) = \operatorname{tr}(H) \quad \text{für alle } H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$Ddet$ ist die Ableitung von det und damit ist $Ddet(p)(h)$ wohldefiniert für $p, h \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $tr(H)$ ist die Spur der Matrix H.
Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 4.6.2002 bis 9:15.