---

**Aufgabe 1** *(Tangentialraum von Graphen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Graphenabbildung einer Funktion $f \in C^1(\Omega)$ ist gegeben durch

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1},\ F(x) = (x, f(x)).$$

(1) Berechnen Sie die Jacobimatrix von $F$ im Punkt $x_0 \in \Omega$.

(2) Zeigen Sie, dass der Unterraum $T := \operatorname{Bild} DF(x_0)$ die Dimension $n$ hat.

(3) Bestimmen Sie die Einheitsnormale $\nu$ an $T$, das heißt $\langle \nu, DF(x_0)\, e_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, n$ und $|\nu| = 1$.

(4) Rechnen Sie explizit und zeichnen Sie für $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ und $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$.

*Hinweis:* Der Unterraum $\operatorname{Bild} DF(x_0)$ wird als Tangentialraum von $\operatorname{Graph}(f)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bezeichnet, der affine Unterraum $F(x_0) + \operatorname{Bild} DF(x_0)$ als affiner Tangentialraum.

**Aufgabe 2** *(Ableitung der p-Normen)*
Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie den Gradienten:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{mit } p \in [1, \infty).$$

**Aufgabe 3** *(Ableitung von* det*, Fortsetzung)*
Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ an einer beliebigen Stelle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, i.e. $\det(A) \neq 0$, wie folgt gegeben ist:

$$D \det(A) H = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} H).$$

*Hinweis:* Aus dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt $\det(A + tH) = \det(A) \det(A^{-1}(A + tH))$. Verwenden Sie nun die Kettenregel und das Ergebnis von Serie 6, Aufgabe 4.

**Aufgabe 4** *(Schwerpunkt)*
Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und $m_1, \dots, m_k > 0$. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i\, |x - a_i|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$.
*Hinweis:* Diese Aufgabe ist ganz ähnlich zu Aufgabe 2 in Serie 5, aber einfacher.

**Aufgabe 5** *(Integration von Matrix-Funktionen)*
Sei $I = [a, b]$. Das Integral einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}^N$ ist komponentenweise definiert, das heißt es gilt $\int_a^b f = \sum_{i=1}^N \left( \int_a^b f_i \right) e_i$. Bestätigen Sie für eine stetige Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{m \times n}$ die Formel

$$\int_a^b A(t)v\,dt = \left( \int_a^b A(t)\,dt \right) v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

*Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 11.6.2002 bis 9:15.*