
Aufgabe 1 *(Analytische Funktionen)*
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\exp, \sin$ und $\cos$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe mit Entwicklungspunkt x_0 dargestellt werden, insbesondere also analytisch sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Funktionalgleichung bzw. die Additionstheoreme.

Aufgabe 2 *(Binomialreihe)*
Rechnen Sie nach, dass die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

die Binomialreihe $B_\alpha(x) := \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ ist. Zeigen Sie für $x \in [0,1)$ mittels geeigneter Abschätzung des Restglieds, dass die Reihe in der Tat gegen $f(x)$ konvergiert.
Hinweis: Das ist auch für $x \in (-1,0)$ richtig, aber schwerer zu beweisen, besonders für $x \in (-1,-1/2]$.

Aufgabe 3 *(Eine zweidimensionale Taylorentwicklung)*
Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^y$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$. Bestimmen Sie damit eine Näherung für die Zahl $1{,}01^{0{,}99}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 4 *(Lokale Approximation durch das Taylorpolynom)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^k(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie:

$$f(x) = P^k_{x_0} f(x) + R^k_{x_0} f(x) \quad \textit{mit} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R^k_{x_0} f(x)}{|x - x_0|^k} = 0,$$

wobei $P^k_{x_0} f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(x_0)(h, \ldots, h)$ das k-te Taylorpolynom von f in x_0 ist.
Hinweis: Verwenden Sie die mehrdimensionale Taylorentwicklung der Ordnung $k-1$.

Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 18.6.2002 bis 9:15.