Aufgabe 1 *(Kritische Punkte)*
Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen f. Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima/Minima handelt und zeichnen Sie jeweils die Höhenlinien $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$.

(a) $f(x,y) = (x+1)(y-2)$.

(b) $f(x,y) = x - x^2 - y^2$.

(c) $f(x,y) = xy(x-1)$.

(d) $f(x,y) = \sin(xy)$.

Aufgabe 2 *(Nichtdegenerierte kritische Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x_0 \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt nichtdegeneriert, wenn die Hessematrix

$$D^2 f(x_0) = \big(\partial_i \partial_j f(x_0)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass ein solcher Punkt isoliert ist: es gibt eine offene Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Aufgabe 3 *(Steinerpunkt)*
Seien a, b, c die Ecken eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abstandssumme

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|.$$

Zeigen Sie: ist $x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{a,b,c\}$ ein Punkt mit $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$, so bilden die Strecken $x_0 a$, $x_0 b$, $x_0 c$ miteinander Winkel von jeweils $2\pi/3$.

Aufgabe 4 *(Zum Zusammenhang)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass je zwei Punkte $x_0, x_1 \in \Omega$ durch einen Polygonzug miteinander verbunden werden können, das heißt es gibt eine stetige und stückweise lineare Funktion $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

Aufgabe 5 *(Schiefer Wurf)*
Es beschreibe $c \in C^2([0,T], \mathbb{R}^2)$, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ unter dem Einfluss der Schwerkraft $(0, -g)$. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet

$$L(t, x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{m}{2}\,(v_1^2 + v_2^2) + mgx_2.$$

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und berechnen Sie die Bewegung mit den Anfangsdaten

$$c(0) = (0,0),\ c'(0) = v_0\,(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \text{ wobei } v_0 > 0 \text{ und } \alpha \in (0, \pi/2].$$

Es sind vier Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 25.6.2002 bis 9:15.