MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

20.4.1998

Minimalflächen
SS 1998
1.Übung

AUFGABE 1:
Es sei $f : I\!R^2 \to I\!R^3$, $f(z) := \frac{2z}{1+|z|^2} + \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} e_3$. Zeigen Sie, daß f eine konforme Parametrisierung von $S^2 - \{-e_3\}$ ist und verifizieren Sie die Differentialgleichung

$$-\Delta f = 2 \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}.$$

AUFGABE 2:
Es sei $f : \Omega \to I\!R^3$ eine Immersion mit induzierter Metrik g . Der Gradient $grad_g u$ einer Funktion $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ ist durch $g(X, grad_g u) = du \cdot X$ erklärt. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $grad_g u = \sum\limits_{i,j=1}^{2} g^{ij} \partial_j u \; e_i$.

(ii) Es sei V eine offene Umgebung von $f(\Omega)$ und $v \in \mathrm{C}^1(\mathrm{V})$. Dann gilt für jedes Vektorfeld X auf Ω

$$\langle df \cdot grad_g(v \circ f), df \cdot X \rangle = \langle (grad\ v) \circ f, df \cdot X \rangle,$$

und $grad_g(v \circ f)$ ist hierdurch eindeutig bestimmt.

(iii) Mit $\mathrm{d}A_g = \sqrt{det\ g}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und $div_g X = \frac{1}{\sqrt{det\ g}} \sum\limits_{i=1}^{2} \partial_i (\sqrt{det\ g} X^i)$ gilt für $\eta \in \mathrm{C}^1_c(\Omega)$, $X \in \mathrm{C}^1(\Omega, I\!R^2)$

$$\int\limits_\Omega \eta\ div_g X \mathrm{d}A_g = - \int\limits_\Omega g(grad_g \eta, X)\ \mathrm{d}A_g.$$

(Hinweis: Verwenden Sie, daß $\int\limits_\Omega div\ Y = 0$ für $Y \in \mathrm{C}^1_c(\Omega, I\!R^2)$.

(iv) $\Delta_g = div_g\ grad_g$.

AUFGABE 3:
Es sei $\mathbf{H}_f$ der mittlere Krümmungsvektor einer Immersion $f \in \mathrm{C}^2(\Omega, I\!R^3)$ und $\Phi \in \mathrm{C}^2(\Omega^\star, \Omega)$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, daß $\mathbf{H}_{f\circ\Phi} = (\mathbf{H}_f) \circ \Phi$.

AUFGABE 4:
Eine Rotationsfläche entsteht durch die Drehung einer Kurve $c : I \to \{(x, 0, z) \mid x > 0\}$, I kompakt, um die z-Achse. Bestimmen Sie eine konforme Parametrisierung einer solchen Fläche.

AUFGABE 5:
Für ein Skalarprodukt g auf $I\!R^2$ ist der Winkel zwischen Vektoren $v, w \neq 0$ durch

$$\sphericalangle_g\,(v,w) = arccos(\frac{g(v,w)}{\parallel v \parallel_g \parallel w \parallel_g})$$

erklärt. Für zwei Skalarprodukte g_1, g_2 auf $I\!R^2$ sind dann äquivalent:

(i) $\exists \lambda > 0 : \; g_2 = \lambda^2 g_1$.

(ii) $\sphericalangle_{g_1}(v,w) = \sphericalangle_{g_2}(v,w)$ für alle v, w .

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 27.4.1998, von 11^{00} *Uhr bis* 11^{10} *Uhr.*