MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

2.7.1998

Minimalflächen
SS 1998
10.Übung

AUFGABE 37:
Berechnen Sie die Metrik, die Weingartenabbildung, die zweite Fundamentalform, die Hauptkrümmungen und die Gaußkrümmung für das Helikoid

$$f(t,\varphi) := (\sinh(t)\cos(\varphi), \sinh(t)\sin(\varphi), \varphi)^T.$$

AUFGABE 38:
Es sei $\Sigma \subseteq I\!R^3$ die C^2-Oberfläche eines strikt konvexen Körpers, und Σ habe strikt positive Gaußkrümmung. Zeigen Sie

$$\int\limits_\Sigma K \mathrm{d}A = 4\pi.$$

AUFGABE 39:
Zeigen Sie, daß jede C^2-Fläche $\Sigma \subseteq I\!R^3$ nach Rotation lokal als Graph $(x,y) \mapsto (x,y,u(x,y))$ mit $u(x,y) = \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2) + o(|x|^2 + |y|^2)$ geschrieben werden kann. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingartenabblidung im Nullpunkt und skizzieren Sie die Fläche in einer Umgebung von 0. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\lambda\mu > 0$ (elliptisch), $\lambda\mu < 0$ (hyperbolisch) und $\lambda\mu = 0$ (parabolisch).

AUFGABE 40:
Betrachten Sie eine Rotationsfläche mit der Parametrisierung

$$(s,\varphi) \mapsto (\alpha(s)\cos(\varphi), \alpha(s)\sin(\varphi), \beta(s))$$

mit $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Es gilt

$$\alpha'' + K\alpha = 0,$$

wobei K die Gaußkrümmung ist. Berechnen Sie daraus und mit $\beta = \int \sqrt{1-\alpha'^2}$ alle Parametrisierungen mit konstanter Gaußkrümmung.

(b) Alle Rotationsflächen mit Gaußkrümmung $K \equiv 1$, die die $xy-$Ebene senkrecht schneiden, sind gegeben durch

$$\alpha(s) = C\cos(s),\ \beta(s) = \int\limits_0^s \sqrt{1 - C^2\sin(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Skizzieren Sie das Profil der Flächen in der $xz-$Ebene in den Fällen $0 < C < 1$, $C = 1$ und $C > 1$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Donnerstag, 9.7.1998, von 11^{00} *Uhr bis* 11^{10} *Uhr.*