MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

30.4.1998

Minimalflächen
SS 1998
2.Übung

**AUFGABE 6:** (Liouville)
Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, daß $u$ ein Polynom vom Grade höchstens n ist, falls $\frac{|u(z)|}{|z|^{n+1}} \to 0$ für $|z| \to \infty$ .
(Hinweis: Zeigen Sie, daß $D^\alpha u \equiv 0$ für $|\alpha| = n+1$ .)

**AUFGABE 7:** (Harnack Ungleichung)
Es sei $u \geq 0$ harmonisch auf $B_{3R}(0) \subset \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie

$$\sup_{B_R(0)} u \leq 9 \inf_{B_R(0)} u.$$

Zeigen Sie für beliebige offene Mengen $\Omega' \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \geq 0$ harmonisch auf $\Omega$ die Abschätzung

$$\sup_{\Omega'} u \leq C(\Omega, \Omega') \inf_{\Omega'} u.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Mittelwertformel für $u$ .)

**AUFGABE 8:**
Wir betrachten die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und Abbildungen $S : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Form

$$S(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$ . Wir setzen weiter

$$S(\infty) = \frac{a}{c} \text{ und } S(-\frac{d}{c}) = \infty.$$

$S$ heißt Möbiustransformation. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Möbiustransformationen sind bijektiv und konform.

(b) Die Verkettung zweier Möbiustransformationen ist wieder eine Möbiustransformation, und diese bilden eine Gruppe.

(c) Für $z_2, z_3, z_4$ paarweise verschieden sei

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

und $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}, \frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}, \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ , falls $z_2$, $z_3$ oder $z_4 = \infty$ . Dann ist $S(z) := (z, z_2, z_3, z_4)$ eine Möbiustransformation, die $z_2, z_3, z_4$ auf $0, 1, \infty$ abbildet, und dies ist die einzige Möbiustransformation mit dieser Eigenschaft.

**AUFGABE 9:**
Zeigen Sie, daß parallel Verschiebungen $P_a(z) := z + a,\ a \in \mathbb{C}$, Homothetien $H_k(z) := kz,\ k \in \mathbb{C} - \{0\}$ und Inversionen an Sphären $I_{a,r}(z) := a + \frac{r^2}{z-a},\ a \in \mathbb{C},\ r > 0$, Möbiustransformationen sind, und diese die Gruppe der Möbiustransformationen erzeugen.
Bestimmen Sie eine Möbiustransformation, die die Einheitskreisscheibe auf sich selbst abbildet und die 0 auf einen gegebenen Punkt $z_0 \in B_1(0)$ überführt, durch Verkettung der Inversion an der Einheitssphäre und der Inversion einer Sphäre, deren Zentrum auf der Gerade durch 0 und $z_0 \neq 0$ liegt.

*Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Donnerstag, 7.5.1998, von* $11^{00}$ *Uhr bis* $11^{10}$ *Uhr.*