MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

7.5.1998

Minimalflächen
SS 1998
3.Übung

AUFGABE 10:
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^2$ offen und $f : \overline{\Omega} \to I\!R^m$ stetig und harmonisch in Ω. Zeigen Sie, daß das Bild von f in der konvexen Hülle des Bildes vom Rand von Ω enthalten ist, d.h.

$$f(\Omega) \subseteq conv(f(\partial\Omega)).$$

AUFGABE 11:
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^2$ offen und zusammenhängend, $u : \Omega \to I\!R$ harmonisch, $0 < r \leq \varrho \leq R$, $Rr = \varrho^2$ und $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} u(x_0 + r\omega)u(x_0 + R\omega)\ \mathrm{d}\mathcal{H}^1(\omega) = \int\limits_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \varrho\omega)^2\ \mathrm{d}\mathcal{H}^1(\omega),$$

und schließen Sie daraus, daß harmonische Funktionen identisch verschwinden, falls diese in der Umgebung eines Punktes verschwinden.
(Hinweis: Entwickeln Sie u als Potenzreihe in homogene, harmonische Polynome.)

AUFGABE 12:
Es sei $f : B_1 \to B_1$ holomorph und bijektiv. Zeigen Sie, daß f eine Möbiustransformation ist, siehe Aufgabe 8.
(Hinweis: Zeigen Sie für f mit $f(0) = 0$, daß $\frac{f(z)}{z}$ und $\frac{z}{f(z)}$ holomorph sind und wenden Sie das Maximumprinzip an.)

AUFGABE 13:
Jeder invertierbaren Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ wird eine Möbiustransformation $T_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ zugeordnet, siehe Aufgabe 8. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Möbiustransformationen bilden Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab. (Kreise und Geraden sind Lösungen von $\alpha z\bar{z} + \frac{1}{2}(\gamma\bar{z} + \bar{\gamma}z) + \beta = 0$ mit $\alpha,\ \beta \in I\!R,\ \gamma \in \mathbb{C}$.)

(ii) Für das Doppelverhältnis, siehe Aufagbe 8, von paarweise verschiedenen Punkten gilt

$$(z, z_1, z_2, z_3) \in I\!R \Leftrightarrow z, z_1, z_2, z_4 \text{ liegen auf einem Kreis oder Gerade.}$$

(iii) Es sei $T_A \neq id$. Dann hat T_A genau zwei Fixpuntke, falls A diagonalisierbar ist, und T_A hat genau einen Fixpunkt, falls A nicht diagonalisierbar ist. Im ersten Fall heißt T_A hyperbolisch, im zweiten parabolisch. Betrachten Sie die Jordan-Normalform J von A und beschreiben Sie T_J in beiden Fällen.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Donnerstag, 14.5.1998, von 11^{00} *Uhr bis* 11^{10} *Uhr.*