MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

10.6.1998

Minimalflächen
SS 1998
7.Übung

AUFGABE 25:
Es sei $\Omega \subseteq I\!R^2$ offen, beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Weiter sei $\omega := a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ eine 1-Form auf Ω , $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ und $X := ae_1 + be_2$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{d}\omega = -div(JX)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, wobei J die positive Drehung um 90 Grad ist. Zeigen Sie weiter mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

AUFGABE 26:
Γ sei eine Jordankurve im $I\!R^3$ und $f \in \mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$ sei ein Minimum von $E(.)$ unter der Nebenbedingung

$$\int_{B_1} f^*\omega = V \in I\!R.$$

Zeigen Sie, daß f konform parametrisiert ist.

AUFGABE 27:
Es sei $f \in C^1(B^+ \cup I, I\!R^3)$, $B^+ := B_1 \cap \{y > 0\}$, $I :=]-1,1[\times\{0\} \subseteq \overline{B^+}$, eine Minimalfläche, d.h.

$$\Delta f = 0, \quad \mathrm{d}f^*\mathrm{d}f = \frac{1}{2}|\mathrm{d}f|^2\, id.$$

Weiter sei $P := \{x \in I\!R^3 \mid \langle x - p_0, \nu\rangle = 0\ \}$ eine Ebene mit Normale $\nu \in S^2$. Es gelte

$$f(I) \subseteq P, \quad \langle \partial_x f \wedge \partial_y f, \nu\rangle = 0 \quad \text{auf } I,$$

d.h. f trifft P orthogonal in I , falls $\mathrm{d}f \neq 0$. Erweitern Sie f durch

$$f(x, -y) := \sigma_P(f(x,y)) \qquad \text{für } y \geq 0,$$

wobei σ_p die Spiegelung an P bezeichnet. Zeigen Sie, daß diese Fortsetzung wieder eine Minimalfläche ist.

AUFGABE 28:
Es sei $h : B_1 \to I\!R$ harmonisch und h^* ihre konjugiert Harmonische. h sei regulär auf seiner 0-Niveaumenge, d.h.

$$grad\ h(x) \neq 0 \text{ für } h(x) = 0.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen für $0 < r < 1$.

(a) Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = grad\ h^*(\gamma), \quad \gamma(t) \in B_r$$

mit Anfangsdaten auf der 0-Niveaumenge von h , also $h(\gamma(0)) = 0$, verläuft auf der 0-Niveaumenge von h . Weiter hat γ ein endliches maximales Lösungsinterval und trifft ∂B_r in zwei verschiedenen Punkten an den Endpunkten des Lösungsintervals.

(b) Die Komponenten von $[h = 0] \cap B_r$ in B_r sind reguläre Kurven, die zwei verschiedene Punkte von ∂B_r in B_r verbinden.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Donnerstag, 18.6.1998, von 11^{00} *Uhr bis* 11^{10} *Uhr.*