MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

18.6.1998

Minimalflächen
SS 1998
8.Übung

AUFGABE 29:
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Die Parametrisierung $f(z) := (z, u(z))$ wird als nicht parametrische Darstellung des Graphen von u bezeichnet. Berechnen Sie den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H} = \Delta_g f$.
(Hinweis: Es ergibt sich

$$H^1 = \frac{1}{W}\, div\, \left(\frac{1+u_y^2}{W}, -\frac{u_x u_y}{W} \right),\ H^2 = \frac{1}{W}\, div\, \left(-\frac{u_x u_y}{W}, \frac{1+u_x^2}{W} \right),\ H^3 = \frac{1}{W}\, div\, \left(\frac{u_x}{W}, \frac{u_y}{W} \right),$$

wobei $W := \sqrt{1+|du|^2}$.)

AUFGABE 30:
Der Graph einer Funktion $u \in C^2(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ist eine Minimalfläche genau dann, wenn die Gleichung

$$div\, \left(\frac{grad\ u}{\sqrt{1+|grad\ u|^2}}\right) = 0$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie eine Lösung von der Form $u(x,y) = v(x) + w(y)$. Zeichnen und beschreiben Sie diese Lösung.
(Hinweis: Wählen Sie als Anfangswerte $v(0) = w(0) = v'(0) = w'(0) = 0,\ v''(0) = -w''(0) = 1$.)

AUFGABE 31:
Der Graph von $u \in C^2(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und konvex, sei eine Minimalfläche. Folgern Sie aus dem Ergebnis von Aufgabe 29 die Existenz von Funktionen $a, b \in C^2(\Omega)$ mit

$$\mathrm{d}a = \frac{(1+u_x^2)\mathrm{d}x + u_x u_y \mathrm{d}y}{\sqrt{1+|grad\ u|^2}}, \quad \mathrm{d}b = \frac{u_x u_y \mathrm{d}x + (1+u_y^2)\mathrm{d}y}{\sqrt{1+|grad\ u|^2}}.$$

Betrachten Sie $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x,y) := (x + a(x,y), y + b(x,y)).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) φ ist ein Diffeomorphismus auf die offene Menge $U := \varphi(\Omega)$, und $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| > |z_2 - z_1|$ für $z_1 \neq z_2 \in \Omega$.

(ii) Die Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit $f(w) := (\varphi^{-1}(w), u(\varphi^{-1}(w)))$ ist konform.

(Hinweis: Es kann hilfreich sein die Basisvektoren e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ so zu wählen, daß $grad\ u(z_0) = |grad\ u(z_0)| e_1$ für einen vorgegebenen Punkt $z_0 \in \Omega$.)

AUFGABE 32:
Der Graph von $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$, $\Omega \subseteq I\!R^2$ offen, sei eine Minimalfläche. Das Vektorfeld

$$\nu(x,y,z) = \frac{(-grad\ u(x,y), 1)}{\sqrt{1 + |grad\ u(x,y)|^2}}$$

sei auf $\overline{\Omega} \times I\!R$ definiert. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\omega := \nu \lfloor (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ ist geschlossen.

(ii) Für eine orientierte, kompakte Fäche $\Sigma \subseteq \overline{\Omega} \times I\!R$ gilt

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \langle \nu, \nu_\Sigma \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^2$$

wobei ν_Σ die Normale an Σ ist.

(iii) Der Graph minimiert den Flächeninhalt unter allen orientierten, kompakten Flächen $\Sigma \subseteq \overline{\Omega} \times I\!R$ mit $\partial\Sigma = graph(u|_{\partial\Omega})$, d.h.

$$A(graph(u)) \leq A(\Sigma).$$

(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Tatsache, daß ω als geschlossene 2-Form auf einem Zylindergebiet $\overline{\Omega} \times I\!R$ exakt ist und wenden Sie den Satz von Stokes an.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Donnerstag, 25.6.1998, von 11^{00} *Uhr bis* 11^{10} *Uhr.*