MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

19.4.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
1.Übung

AUFGABE 1: (Hölderräume)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ ein nichtleere, offene, zusammenhängende Menge mit Lipschitzrand. Weiter seien $l \leq k \in I\!N_0,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ l+\beta < k+\alpha$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist ein Banachraum.

(ii) Die Einbettung $C^{k+1,0}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,1}(\Omega)$ ist stetig.
(Hinweis: Zeigen Sie unter Verwendung des Lipschitzrandes, daß zwei Punkte in $x, y \in \Omega$ durch einen glatten Weg in Ω mit Länge $L \leq C(\Omega)|x-y|$ verbunden werden können.)

(iii) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon(k, l, \alpha, \beta) < \infty$ mit

$$\| u \|_{C^{l,\beta}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + C_\varepsilon \| u \|_{C^0(\Omega)}$$

für $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.
(Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zuerst für $k = l = 0$ und dann für $k = l = 1$ und $\beta = 0$. Beachten Sie für den zweiten Fall, daß $|\nabla u(x_0)| \geq \varepsilon$ zusammen mit $\| \nabla u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq 1$ eine Oszillation von mindestens $c_0(\varepsilon)$ für u impliziert.)

(iv) Die Einbettung $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$ ist kompakt.

AUFGABE 2: (Lokale Abschätzungen)
Zeigen Sie für $u \in C^{2,\alpha}(B_2(0)),\ 0 < \alpha < 1$, daß

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} \leq C(\| \Delta u \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^{1,\alpha}(B_2(0))}).$$

(Hinweis: Betrachten Sie $u\eta$ mit einer geeigneten Abschneidefunktion η , und wenden Sie die Ganzraumabschätzung der Vorlesung und Aufgabe 1 (iii) an.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 26.4.1999, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*