MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

3.5.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
3.Übung

AUFGABE 5: (Biharmonische Gleichung)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit $C^{4,\alpha}-$Rand, $0 < \alpha < 1$. Weiter seien $\psi \in C^{4,\alpha}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Zeigen Sie, daß es genau eine Lösung $u \in C^{4,\alpha}(\Omega)$ der biharmonischen Gleichung, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f &\quad \text{in } \Omega, \\ u = \psi &\quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \Delta u = \varphi &\quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

gibt. Zeigen Sie weiter, daß

$$\| u \|_{C^{4,\alpha}(\Omega)} \leq C(\| f \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| \psi \|_{C^{4,\alpha}(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}),$$

mit einer von f, ψ, φ unabhängigen Konstanten C . Was läßt sich sagen, wenn die zweite Randbedingung durch $\partial_\nu u = \varphi$ ersetzt wrid ?
(Hinweis: Verwenden Sie eine $C^{4,\alpha}-$Abschätzung für Lösungen der Laplace-Gleichung mit rechter Seite in $C^{2,\alpha}$.)

AUFGABE 6: (Fredholmoperatoren)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit $C^{2,\alpha}-$Rand, $0 < \alpha < 1$. Weiter seien $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ für $\xi \in I\!R^n$ und gegebenes $c_0 > 0$. Wir betrachten den linearen Differentialoperator $L : C^{2,\alpha}(\Omega) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\} \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu.$$

Zeigen Sie, daß L endlichen Kern und ein abgeschlossenes Bild hat.
(Hinweis: Verwenden Sie, daß L ein Isomorphismus für $c \leq 0$ ist, und schreiben Sie $L = L_0 - C$, wobei L_0 ein Isomorphismus ist und C ein kompakter Operator ist.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 10.5.1999.