MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

10.5.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
4.Übung

AUFGABE 7: (Monge-Ampère-Gleichung)

(i) Wir betrachten für $u \in C^2$ strikt konvex und $D^2u > 0$ die Monge-Ampère-Gleichung

$$det(D^2u) = f.$$

Zeigen Sie, daß diese Gleichung strikt elliptisch in einer C^2-Umgebung von u ist und daß die Abbildung $A \mapsto log(\ det(A))$ konkav auf dem Raum der symmetrischen, positiv-definiten Matrizen ist.

(ii) Nun sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen mit $C^{2,\alpha}-$Rand und $\Omega_T := \Omega\times]0,T[$ für $T > 0$. Weiter sei $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ strikt konvex und $f \in C^{0,0,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ mit $-det(D^2u_0) = f$ auf $\partial\Omega \times \{0\}$. Zeigen Sie, daß eine eindeutige, in der Zeit lokale Lösung der parabolischen Monge-Ampère Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - det(D^2u) = f \quad &\text{in } \Omega_T, \\ u = 0 \quad &\text{auf } (\partial\Omega) \times [0,T], \\ u = u_0 \quad &\text{in } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

existiert.

AUFGABE 8: (Semi-lineare parabolische Gleichung)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen mit $C^{2,\alpha}-$Rand und $\Omega_T := \Omega\times]0,T[$ für $T > 0$. Weiter seien $a_{ij}, b_i, c, f \in C^{0,0,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ mit $f = 0$ auf $\partial\Omega \times \{0\}$ und $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ für $\xi \in I\!R^n$ und gegebenes $c_0 > 0$ und $g \in C^2(I\!R),\ g(0) = 0$. Zeigen Sie, daß für kleines ε das parabolische Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = f + \varepsilon g(u) \quad &\text{in } \Omega_T, \\ u = 0 \quad &\text{auf } ((\partial\Omega) \times [0,T]) \cup \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

AUFGABE 9: (Nicht-lineares Maximumprinzip)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen, $\Omega_T := \Omega\times]0,T[$ für $T > 0$ und $F : \overline{\Omega_T} \times I\!R \times I\!R^n \times I\!R^{n\times n} \to I\!R$ ein nicht-linearer, glatter, elliptischer Differentialoperator. Insbesondere ist $\partial_{p_{ij}} F$ positiv definit. Nun seien $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$ Unter- bzw. Oberlösungen von

$$\begin{aligned} \partial_t u - F(.,.,u,Du,D^2u) \leq 0 \quad &\text{in } \Omega_T, \\ \partial_t v - F(.,.,v,Dv,D^2v) > 0 \quad &\text{in } \Omega_T, \\ u \leq v \quad &\text{auf } ((\partial\Omega) \times [0,T]) \cup \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $u \leq v$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 17.5.1999.