MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

17.5.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
5.Übung

AUFGABE 10: (Maximale Regularität von Lösungen)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit $C^\infty-$Rand und $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Es sei $u \in H^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= (1+|Du|^2)^{s/2} \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, wenn $1 \leq s < 1 + \frac{2}{n}$.

AUFGABE 11: (Existenz mit Ober- und Unterlösungen)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $C^{2,\alpha}-$Rand, $0 < \alpha < 1$. Weiter seien $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und gegebenes $c_0 > 0$. Wir betrachten die semilineare, elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} Lu := -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Weiter seien $u^\pm \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ Ober- bzw. Unterlösungen, d.h.

$$\begin{aligned} Lu^\pm &\geq (\leq) f(u^\pm) \quad \text{in } \Omega, \\ u^\pm &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Begründen Sie, warum für $u^- \leq u \leq u^+$ die Annahmen $c \geq 0$, $f' \geq 0$ gerechtfertigt sind. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $u_0 := u^-$, $Lu_k := f(u_{k-1})$, $u_k = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, daß u_k beschränkt in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist und monoton in $C^2(\overline{\Omega})$ gegen eine Lösung $u^- \leq u \leq u^+$ konvergiert.
(Hinweis: Verwenden Sie die Schauder-Abschätzung und Interpolation.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 31.5.1999.