MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

7.6.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
7.Übung

AUFGABE 13: (Eingebettete H-Flächen)
Wir betrachten eine eingebettete, glatte, kompakte, orientierte Hyperfläche Σ im $\mathbb{R}^n$. Die mittlere Krümmung sei konstant H_0, d.h. $\vec{H}_\Sigma = -H_0\nu$, wobei ν die orientierte Einheitsnormale ist. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Wir nehmen an, daß Σ in der Umgebung eines Punktes der Graph einer Funktion φ über $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ ist, wobei die orientierte Normale nach oben zeigt. Dann erfüllt φ folgende quasi-lineare elliptische Differentialgleichung

$$\nabla\left(\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\right) = H_0.$$

(ii) Wir betrachten nun zwei Graphen wie in (i). Falls diese sich in einem inneren Punkt berühren, so sind sie identisch.

(iii) Wir betrachten nochmals zwei Graphen wie in (i), die übereinanderliegen und in einem Randpunkt samt Tangentialebene übereinstimmen. Dann sind die Graphen wieder identisch.

(iv) Wir betrachten Σ und eine beliebige Hyperebene P_λ, die vom Unendlichen aus mit Parameter λ parallel verschoben wird, bis diese Σ zum ersten mal bei λ_0 trifft. Nun wird P_{λ_0} weiter parallel verschoben. P_λ zerteilt Σ in zwei offene Teile $\Sigma_{\lambda,+}$ und $\Sigma_{\lambda,-}$. Der Teil $\Sigma_{\lambda,+}$, der den Berührpunkt enthält wird an P_λ gespiegelt, und wir erhalten $\tilde{\Sigma}_{\lambda,+}$. Für $\lambda = \lambda_0 + \delta$, δ klein, sind $\tilde{\Sigma}_{\lambda,+}$ und $\Sigma_{\lambda,-}$ disjunkt.

(v) Wir betrachten

$$\lambda_1 := \sup\{t > \lambda_0 \mid \tilde{\Sigma}_{\lambda,+} \text{ und } \Sigma_{\lambda,-} \text{ sind disjunkt für } \lambda_0 < \lambda < t\ \}.$$

$\tilde{\Sigma}_{\lambda_1,+}$ und $\Sigma_{\lambda_1,-}$ haben mindestens einen gemeinsamen Punkt in ihren Abschlüssen, der wie in (ii) oder (iii) ist.

(vi) Es gilt

$$\tilde{\Sigma}_{\lambda_1,+} = \Sigma_{\lambda_1,-}.$$

(vii) Satz von Alexandroff: Σ ist eine Sphäre.
(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, daß eine Hyperfläche, die in jeder Richtung spiegelsymmetrisch ist, eine Sphäre ist.)

AUFGABE 14: (L^p-Normen)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $|u|^p \in L^1(\Omega)$ für ein $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \| u \|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log(|u|)\mathrm{d}x\right).$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 21.6.1999.