MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

21.6.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen II
SS 1999
8.Übung

AUFGABE 15:
Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T))$, $n \geq 3$ eine $\mathbb{Z}^n$−periodische, nichtnegative Lösung von $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Zeigen Sie für $\Omega :=]0,1[^n \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 < \tau \leq 1$, daß

$$\sup_\Omega u(.,\tau) \leq C(n)\tau^{-n/4} \parallel u(.,0) \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

(Hinweis:

(a) Testen Sie mit $w := u^{1+\alpha}$ für $\alpha \geq 0$ und zeigen Sie

$$0 \leq \int_{\Omega\times\{t\}} |Dw|^2 \leq -\frac{2+\alpha}{4(1+\alpha)}\partial_t \int_{\Omega\times\{t\}} w^2,$$

wobei $w := u^{1+\alpha/2}$.

(b) Integrieren Sie von t_1 bis t_2 und verwenden Sie die Monotonie von $\int_{\Omega\times\{t\}} w^2$, die aus (a) folgt, und eine Sobolev-Einbettung, um

$$\Big(\int_{\Omega\times\{t_2\}} w^{2\kappa}\Big)^{1/\kappa} \leq \frac{C(n)}{t_2 - t_1} \int_{\Omega\times\{t_1\}} w^2$$

zu erhalten.

(c) Iterieren Sie schließlich mit $1 + \alpha/2 = \kappa^\nu$, $t_\nu = (1 - 2^{-\nu})\tau$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 28.6.1999.