
Aufgabe 1 *(Charakterisierung von* exp *durch die Funktionalgleichung)*
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe folgende zwei Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x+y) = f(x)\,f(y) & \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \\ (2) & \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) & \text{(Stetigkeit bei } x = 0). \end{array}$$

Zeigen Sie: entweder ist $a = f(1) > 0$ und $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, oder f ist die Nullfunktion.

Aufgabe 2 *(Area Sinus hyperbolicus)*
Wir definieren die Funktion sinh (*Sinus hyperbolicus*) durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass sinh eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arsinh (*Area Sinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\operatorname{Arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ her.

Aufgabe 3 *(Sprungstellen monotoner Funktionen)*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Nach Kap. 2, Lemma 3.1 der Vorlesung existieren für $x_0 \in (a,b)$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f_+(x_0)$ und $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) =: f_-(x_0)$. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann stetig in x_0, wenn $f_+(x_0) = f_-(x_0)$. Andernfalls heißt x_0 eine Sprungstelle mit Sprung $f_+(x_0) - f_-(x_0) > 0$.

(2) Die Menge der Sprungstellen von f ist abzählbar.

Hinweis: Aufgabe 4, Serie 6.

Aufgabe 4 *(Monotonie und Invertierbarkeit)*
Beweisen Sie: eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

Aufgabe 5 *(freiwillige Wiederholung: keine Abgabe)*
Stellen Sie die folgenden, für das weitere Verständnis wesentlichen Begriffe zusammen. Versuchen Sie, Beispiele und Gegenbeispiele zu finden, die *nicht* schon in der Vorlesung gegeben wurden.
Begriffe: Betrag und Euklidische Norm, Konvergenz von Folgen (Nullfolgen, monotone Folgen, uneigentliche Konvergenz), Cauchyfolge, Teilfolge, beschränkte Folge und Häufungspunkt einer Folge, Limes inferior und superior, Intervallschachtelung, Häufungspunkt einer Menge, Supremum/Infimum, Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$, offene und

abgeschlossene Menge, kompakte Menge, ε-Umgebung, Stetigkeit (mit $\varepsilon - \delta$ und mit Folgen), Lipschitzstetigkeit, Umkehrfunktion, Maximum/Minimum, Ableitung.

Spielecke. Eine Eisenbahn fährt nach elektronisch gesteuertem Fahrplan $s = s(t)$, $t \in [0, T]$ von Freiburg ($s(0) = 0$) nach Paris ($s(t) = 500$). Dabei ist $s(t)$ – die Entfernung von Freiburg zur Zeit t – eine stetige Funktion (Stillstand ist erlaubt). Mit einem Scharniergelenk ist ein Stab reibungsfrei beweglich auf einem Wagen befestigt; er kann alle Positionen zwischen Fahrtrichtung ($\alpha = 0°$) und Gegenfahrtrichtung ($\alpha = 180°$) annehmen. Für jede Wahl einer Anfangslage α_0 wird die Bewegung des Stabes (allein unter dem Einfluss der Schwerkraft und den Bewegungen des Zuges) durch eine Funktion $\alpha = \varphi(\alpha_0, t)$ beschrieben. Wir nehmen folgende Hypothesen an:

- Falls der Stab zu einer Zeit t_0 liegt (also $\alpha = 0°$ oder $\alpha = 180°$), so ändert sich daran nichts mehr für alle $t \geq t_0$.
- Die Funktion $\varphi(\alpha_0, t)$ hängt stetig von α_0 und t ab.

Behauptung: Durch geeignete Wahl der Anfangsstellung in Freiburg können Sie erreichen, dass der Stab während der gesamten Fahrt niemals hinfällt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 7.1.2002 bis 10:15.