Aufgabe 1 *(Differentiationsregeln)*
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mit Angabe des Definitionsbereichs):

(a) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0)$,
(b) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$,
(c) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$ $\quad$ (vgl. Aufgabe 2, Serie 10).

Aufgabe 2 *(Kettenregel)*
Differenzieren Sie die beiden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^{(x^x)}$
(b) $f(x) = (x^x)^x$.

Aufgabe 3 *(Definition der Ableitung)*
Sei $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-a, a) \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^{1+\alpha}\, g(x)$$

im Punkt $x = 0$ die Ableitung $f'(0) = 0$ hat, falls $\alpha > 0$ ist.

Aufgabe 4 *(Brechungsgesetz von Snellius)*
Der Triathlet aus Beispiel 4.1 will einen Punkt $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ am Ufer ansteuern, so dass seine Gesamtzeit

$$f(x) = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{1}{v_1}\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}$$

minimiert wird. Begründen Sie, dass es (mindestens) einen optimalen Punkt gibt, und leiten Sie für diesen eine Gleichung her.

Aufgabe 5 *(Differentiation von bilinearen Termen)*
Die Abbildung $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $(u, v) \mapsto B(u, v)$, sei bilinear, das heißt für $u_1, u_2, u \in \mathbb{R}^m$, $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v), \\ B(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= \mu_1 B(u, v_1) + \mu_2 B(u, v_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie für differenzierbare $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die Produktregel

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Schreiben Sie die Regel in folgenden Spezialfällen auf:

1. $B(u, v) = \langle u, v \rangle$ (Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$),
2. $B(u, v) = uv$ (komplexe Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$),
3. $B(u, v) = u \times v$ (Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$),
4. $B(u, v) = uv$ (Produkt der Matrizen u und v).

Es gibt im Moment zu viele Pflichtaufgaben, daher diesmal keine Spielecke. Wie üblich kommen (höchstens) vier der fünf Aufgaben zur Anrechnung (= maximal 16 Punkte). Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 14.1.2002 bis 10:15.