Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 12
Prof. Dr. E. Kuwert — 14. Januar 2002

Aufgabe 1 *(Hebbarer Punkt für f')*
Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $x_0 \in D$ stetig, auf $D \backslash \{x_0\}$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz $f'(x_0) = a$.

Aufgabe 2 *(Eine Abschneidefunktion)*
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass für geeignete Polynome p_n gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})\, e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Anmerkung: f ist also unendlich oft differenzierbar. Ist $g \in C^k(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so gilt $fg = 0$ auf $(-\infty, 0]$ und $fg \in C^k(\mathbb{R})$ (g wird glatt „abgeschnitten").

Aufgabe 3 *(Maximumprinzip)*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar auf (a, b). Falls $f'' \geq 0$, so gilt $\sup f \leq \max\{f(a), f(b)\}$.
Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst unter der Voraussetzung $f'' \geq \varepsilon > 0$. Diese Zusatzannahme werden Sie wieder los, indem Sie $f + \varepsilon q$ mit einer geeigneten Hilfsfunktion q betrachten.

Aufgabe 4 *(Kurvendiskussion)*
Die Funktion

$$\chi(r) = e^{-r/r_B} \left(\frac{r}{r_B}\right)^2 \left(1 - \frac{r}{2r_B}\right)^2 \quad (r \geq 0)$$

tritt beim Wasserstoffatom auf (radiale Wahrscheinlichkeitsdichte im Zustand $n = 2$, $l = 0$). Diskutieren Sie $\chi(r)$ im Bezug auf Monotonie und Extremwerte. ($r_B \approx 5 \cdot 10^{-9}$ cm ist der Bohrsche Radius.)

Spielecke. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in (a, b)$ und hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}$ ist der Differenzenquotient wie folgt definiert:

$$(\Delta_h f)(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Berechnen Sie den zweiten Differenzenquotienten $\Delta_{-h}(\Delta_h f)(x)$ und zeigen Sie: ist $\lim_{h \to 0} \Delta_{-h}(\Delta_h f)(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 21.1.2002 bis 10:15.