Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 13

Prof. Dr. E. Kuwert — 21. Januar 2002

Aufgabe 1 *(Polardarstellung)*
Rechnen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung $z = r\, e^{i\vartheta}$ nach, wenn r und ϑ wie folgt definiert sind:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $r\, e^{i\vartheta}$: -3, $4i$, $-5i$, $-e^{2i}$, $i\, e^{it} (t \in \mathbb{R})$, $1 + i$, $-1 - i$, $(1 + i)^{2001}$.

Aufgabe 2 *(Tangens)*
Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, heißt Tangens. Zeigen Sie:

a) $\tan(t + \pi) = \tan t \quad$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) tan bildet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.
Die Umkehrfunktion heißt arctan (Arcus tangens).

c) arctan ist differenzierbar und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 3 *(zur Funktionalgleichung)*
Berechnen Sie mittels der Eulerschen Formel die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin kt \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 4 *(Anfangswertproblem)*
Für eine reelle 2×2-Matrix A und $z_0 \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad c'(t) = A\, c(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad c(0) = z_0$$

für eine differenzierbare Funktion $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Lösung im Fall
$A = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $(*)$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Bilden Sie die Differenz $c = c_1 - c_2$ von zwei Lösungen und berechnen Sie $\frac{d}{dt}|c|^2$.

Spielecke. Zeigen Sie, dass die Punkte $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ein regelmäßiges n-Eck bilden, mit Umfang $L_n = 2n|\sin\frac{\pi}{n}| \to 2\pi$. Zeichnen Sie für $n = 6$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 28.1.2002 bis 10:15.