Aufgabe 1 *(Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen)*
Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 2 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(\xi) \, d\xi$$

Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 3 *(Integralnorm)*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass durch

$$|| \cdot ||_1 : C^0(I) \to \mathbb{R},\ ||f||_1 = \int_a^b |f|$$

eine Norm definiert ist. Ist $|| \cdot ||_1$ auch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{R}(I)$?

Aufgabe 4 *(Gleichmäßige Konvergenz)*
Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

(b) $f_n(x) = n \log(1 + x/n) - x$ auf $I = [0, 100]$.

Spielecke *(zur Deltafunktion).* Sei $g \in C^0(\mathbb{R})$ nichtnegativ mit $g(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $\int_{\mathbb{R}} g = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die Abbildungen

$$\delta_\varepsilon : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \delta_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x) \, f(x) \, dx, \quad \text{w obei } g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \, g(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Zeigen Sie $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_\varepsilon(f) = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$. Überlegen Sie weiter, ob es eine stetige Funktion $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben kann mit $\int_{\mathbb{R}} g_0(x) \, f(x) \, dx = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Aufgrund Klausurvorbereitung wird diesmal nur die Bearbeitung von zwei der fünf Aufgaben erwartet (= 8 Punkte), wobei aber wie üblich 16 Punkte möglich sind! Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 4.2.2002 bis 10:15.