Aufgabe 1 *(Flächeninhalt der Ellipse)*
Berechnen Sie den von einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, also den Flächeninhalt der Menge

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 *(Substitutionsregel)*
Berechnen Sie dir folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t}$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\,dx$ $(a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

Aufgabe 3 *(Substitutionsregel)*
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$.

Aufgabe 4 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = (a,b)$ offen. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi : I \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx,$$

wobei $a : I^* \to I$ und $b : I^* \to I$ differenzierbar sind. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 5 *(Partielle Integration)*
Für $u, v \in C^0([-\pi, \pi]$ definieren wir $\langle u, v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts besitzt (siehe Kapitel 1, Lemma 5.4). Berechnen Sie weiter die Skalarprodukte $\langle u_k, u_l\rangle$, $\langle v_k, v_l\rangle$ sowie $\langle u_k, v_l\rangle$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \quad \text{und} \quad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 6 *(Partielle Integration)*
Bestätigen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\int_0^1 x^k\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le k \le qn).$$

Dies ist der letzte Zettel, der in die Bewertung eingeht. Es sind vier der sechs Aufgaben zu bearbeiten und maximal 16 Punkte zu erzielen (wie üblich). Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 11.2.2002 bis 10:15.