
Aufgabe 1 *(Maximum/Minimum)*
Definieren Sie $\max(a,b)$ bzw. $\min(a,b)$ für $a,b \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie die Formeln

$$\begin{aligned} \max(a,b) &= \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \\ \min(a,b) &= \frac{1}{2}(a+b-|a-b|). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)*
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ mit $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq 1,$$

und diskutieren Sie den Fall der Gleichheit.

Aufgabe 3 *(Division mit Rest und q-adische Darstellung)*
Begründen Sie, dass es zu $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$p = k \cdot q + r \text{ und } 0 \leq r < q.$$

Folgern Sie, dass jede natürliche Zahl n eine eindeutig bestimmte q-adische Entwicklung besitzt, also

$$n = \sum_{i=0}^{m} r_i \cdot q^i \text{ mit } 0 \leq r_i < q, \text{ wobei } r_m > 0 \text{ und } m \geq 0.$$

Aufgabe 4 *($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist dicht)*
Zeigen Sie: zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

Spielecke
1. Im regelmäßigen Fünfeck sei s die Länge der Seite und d die Länge der Diagonale. Begründen Sie die Beziehung $d/s = s/(d-s)$ und schließen Sie, dass das Verhältnis d/s irrational ist.
2. Zeigen Sie: die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist von einer gewissen Stelle ab periodisch (oder bricht ab).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 29.10.2001 bis 10:15.