Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 3
Prof. Dr. E. Kuwert — 29. Oktober 2001

Aufgabe 1 *(Berechnung von Grenzwerten I)*
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

a) $a_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}$ b) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ d) $a_n = n^{\frac{p}{q}}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 2 *(Berechnung von Grenzwerten II)*
Auch hier ist wieder die Konvergenz zu zeigen.

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$ b) $a_n = n^p\, q^n$ $(p \in \mathbb{N},\ -1 < q < 1)$.

Aufgabe 3 *(Konvergenz von Mittelwerten)*
Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie (wobei es günstig ist, zunächst $a = 0$ anzunehmen):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?

Aufgabe 4 *(Konvergenz von Betrag und Minimum)*
Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Folgern Sie $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ und $\lim_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b)$.

Spielecke Für die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks gilt

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie dies und überlegen Sie, ob die Ungleichungen optimal sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 5.11.2001 bis 10:15.