Aufgabe 1 *(Potenzrechnung)*
a) Zeigen Sie, dass $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \ldots > 1$ für $a > 1$, und $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \ldots < 1$ für $0 < a < 1$.
b) Sei $x > 0$ und $q = k/m \in \mathbb{Q}$ mit $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch $x^q := \sqrt[m]{x^k}$ die rationalen Potenzen von x wohldefiniert sind (also nicht von der Darstellung von q als Bruch abhängen). Beweisen Sie weiter für $x, y > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$ die Regeln

$$(i)\ x^q x^r = x^{q+r} \quad (ii)\ (x^q)^r = x^{qr} \quad (iii)\ x^q y^q = (xy)^q.$$

Aufgabe 2 *(Wallis-Produkt)*
Zeigen Sie die Konvergenz des unendlichen Produkts

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \ldots$$

Aufgabe 3 *(Grenzwert einer rekursiven Folge)*
Betrachten Sie die durch $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 + a$ rekursiv definierte Folge, wobei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge für $a \in [0, 1/4]$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 *(Mehrdeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung)*
Wann stellen zwei unendliche Dezimalbrüche $k_0, k_1 k_2 \ldots$ und $m_0, m_1 m_2 \ldots$ dieselbe reelle Zahl dar?

Spielecke Diesmal ist die Spielecke ganz praktisch. Es soll durch Grenzübergang der Stand eines Kreditkontos zur Zeit $t \geq 0$ berechnet werden, und zwar bei kontinuierlicher Verzinzung und Tilgung. Grundlage ist, dass die finanzielle Belastung pro Zeiteinheit konstant bleibt. Mit dem jährlichen Zinssatz p und der jährlichen Anfangstilgungsrate r ist die Belastung pro Jahr

$$B = S_0\,(p + r) \quad S_0 = (\text{Höhe des Kredits}). \tag{1}$$

Es bezeichne S_k den Kontostand zur Zeit $t_k = \frac{k}{n}\,t$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Begründen Sie die Formel

$$S_k = S_0 \left[1 + \frac{r}{p} \left(1 - (1 + \frac{pt}{n})^k \right) \right] \tag{2}$$

und schließen Sie durch Grenzübergang

$$S(t) = S_0 \left[1 + \frac{r}{p}\,(1 - \exp(pt)) \right]. \tag{3}$$

Ermitteln Sie hieraus die Laufzeit und die Kosten des Kredits und berechnen Sie zum Beispiel für $p = 0,06$, $r = 0,01$ und $r = 0,02$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 12.11.2001 bis 10:15.