
Aufgabe 1 *(Folge mit vielen Häufungspunkten)*
Geben Sie eine Folge an, für die jedes $x \in [0,1]$ ein Häufungspunkt ist.

Aufgabe 2 *(Cauchyfolgen: Definition)*
Weisen Sie jeweils anhand der Definition die Cauchyfolgen-Eigenschaft nach:

$$(i) \quad a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^3}, \qquad (ii) \quad e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Hinweis: Bei der zweiten Folge Vergleich mit einer geometrischen Reihe.

Aufgabe 3 *(Rechenregeln für* $\limsup$*)*
Für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

(i) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$,
(ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 4 *(Ein Konvergenzprinzip)*
Über die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt: es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrerseits eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen a konvergiert. Dann konvergiert schon die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch.

Spielecke. Der Zeiger einer Uhr schreitet statt um Minuten oder Sekunden um einen gewissen Winkel $2\pi \cdot x$ voran. Zeigen Sie: ist x rational, so hat der Zeiger nur endlich viele Positionen. Ist dagegen x irrational, so kommt der Zeiger jeder Stellung beliebig nahe.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 19.11.2001 bis 10:15.