Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 6
Prof. Dr. E. Kuwert — 19. November 2001

Aufgabe 1 *(Supremum und Infimum: Beispiele)*
Bestimmen Sie für die nachstehenden Mengen jeweils Supremum und Infimum, und entscheiden Sie, ob es sich um Maximum bzw. Minimum handelt (ob die Zahlen also durch ein Element der Menge realisiert werden):

$$A = \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\}.$$

Aufgabe 2 *(Mächtigkeit der irrationalen Zahlen)*
Beweisen Sie folgende Aussagen für die Relation $\sim$ (gleichmächtig):

(i) A abzählbar, M unendlich $\Rightarrow$ $M \sim (M \cup A)$.
(ii) $A \subset M$, A abzählbar, M überabzählbar $\Rightarrow$ $M \sim M \backslash A$.

Folgern Sie: die Menge der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 *(Charakterisierung von Konvergenz durch* $\limsup$ *und* $\liminf$*)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der nachstehenden Aussagen:

(a) Die Folge (a_n) ist konvergent oder uneigentlich konvergent.
(b) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4 *(Abzählbarkeit und Summation)*
Sei $M \subset [0, +\infty)$. Es gebe ein $K \in [0, +\infty)$, so dass für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ gilt: $\sum_{i=1}^n x_i \leq K$. Beweisen Sie, dass M abzählbar ist.

Spielecke. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, wenn sie Lösung einer Gleichung

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist. Verwenden Sie, dass jede solche Gleichung *höchstens* n Nullstellen haben kann. Übrigens hat Freiburgs berühmtester Mathematiker Ferdinand von Lindemann 1882 gezeigt, dass die Zahl π transzendent ist. Damit hat er die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, also der Konstruktion eines zum Kreis flächengleichen Quadrats mittels Zirkel und Lineal, bewiesen. Angeblich ist ihm die zündende Idee beim Spazierengehen auf dem Schloßberg gekommen, allerdings hat er auch vorher eine Arbeit von Charles Hermite (1873) gelesen. Dieser hatte bewiesen, dass die Eulersche Zahl e transzendent ist. Eine Büste von Lindemann steht in der Eckerstr. 1 im 4. Stockwerk.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 26.11.2001 bis 10:15.