Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 7
Prof. Dr. E. Kuwert — 25. November 2001

Aufgabe 1 *(Mengen in $\mathbb{R}^2$)*
Zeichnen Sie die nachstehenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 < |z-(0,1)| \leq 2\}, \\ E &= \{z \in \mathbb{R}^2 : |z-(1,0)| + |z+(1,0)| < \tfrac{10}{3}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Würfelschachtelungsprinzip)*
Ein abgeschlossener Würfel im $\mathbb{R}^n$ ist ein kartesisches Produkt

$$W = I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n \subset \mathbb{R}^n$$

von abgeschlossenen Intervallen $I^k \subset \mathbb{R}$ gleicher Länge $|I^k| = a \geq= 0$. Definieren Sie den Begriff *Würfelschachtelung* und begründen Sie, dass durch eine Würfelschachtelung ein eindeutig bestimmter Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

Aufgabe 3 *(Topologie des $\mathbb{R}^n$)*
Sei M eine Menge von Indizes. Für jedes $\mu \in M$ sei eine offene Menge $\Omega_\mu \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(1) $U := \bigcup_{\mu \in M} \Omega_\mu$ ist offen.
(2) $V := \bigcap_{\mu \in M} \Omega_\mu$ ist offen, falls $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ endlich ist.

Belegen Sie durch ein Beispiel, dass (2) für abzählbar unendliche Durchschnitte $\bigcap_{i=1}^\infty \Omega_i$ nicht notwendig gilt.

Aufgabe 4 *(Parallelogrammidentität)*
Beweisen Sie und formulieren Sie mit Worten:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\,(|x|^2 + |y|^2) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Spielecke. Heute etwas Fachfremdes, das ein bisschen zur vorweihnachtlichen Harry-Potter-Manie passt. Auf einem unendlichen Schachbrett bewegt sich ein Springer. Statt der üblichen $2,1$-Zugweise macht er aber p,q-Züge in den beiden Richtungen ($p, q \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie, dass er nur mit einer geraden Zahl von Sprüngen auf sein Ausgangsfeld zurückkommt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 3.12.2001 bis 10:15.