Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 8
Prof. Dr. E. Kuwert — 4. Dezember 2001

Aufgabe 1 *(Wurzelziehen in $\mathbb{C}$)*
Entwerfen Sie ein Programm, dass für jede komplexe Zahl $c = a+ib \in \mathbb{C}$ eine Lösung $z = x + iy$ der Gleichung $z^2 = c$ berechnet.

Aufgabe 2 *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*

(1) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{2-i}{2-3i}, \quad \frac{1}{(3-i)^2}, \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

$$(i-1)(3-i), \quad i^n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad (1+i)^n \ (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = 1$ und fertigen Sie eine Zeichnung an.

Aufgabe 3 *(Normen auf $\mathbb{R}^n$)*
Für $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir Funktionen $||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$||x||_1 := |x^1| + \ldots + |x^n| = \sum_{i=1}^n |x^i|, \quad \text{und} \quad ||x||_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x^i|.$$

Weisen Sie für beide Funktionen die Normeigenschaften (vgl. Skript Lemma 5.5) nach. Skizzieren Sie die "Einheitskugeln" $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 < 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_\infty < 1\}$ für $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4 *(Maximum und Minimum)*
Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Minimum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ (Notation $a = \min M$), wenn gilt:

$$a \in M \text{ und } a \le x \text{ für alle } x \in M.$$

Entsprechend ist $\max M$ definiert. Beweisen Sie, dass eine abgeschlossene und beschränkte Menge ein Minimum und ein Maximum besitzt.

Spielecke. Sei $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Es werden rekursiv $D_0, D_1, D_2, \ldots$ wie folgt definiert:

$$D_{n+1} = \frac{1}{3}D_n \cup [(\frac{2}{3}, 0) + \frac{1}{3}D_n] \cup [(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{3}D_n].$$

Dabei ist $(a,b) + \frac{1}{3}D_n := \{(a + \frac{1}{3}x, b + \frac{1}{3}y) : (x,y) \in D_n\}$ für $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie D_0, D_1 und D_2 und zeigen Sie $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \ldots$. Welche Dimension könnte $D := \bigcap_{n=0}^\infty D_n$ haben?

Abgabe ist am Montag, 10.12.2001 bis 10:15.