Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 01/02, Serie 9
Prof. Dr. E. Kuwert — 11. Dezember 2001

Aufgabe 1 *(Stetigkeit der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$)*
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der in der Vorlesung gegebenen Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ stetig ist. Was ändert sich am Beweis für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$?

Aufgabe 2 *(Stetigkeitspunkte)*
Beantworten Sie die folgende Frage fuer Teil (a) oder (b) (Ihre Wahl).
An welchen Stellen ist die Funktion stetig bzw. unstetig?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\,[\frac{1}{x}] & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(b) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ für } x = \frac{p}{q}, \text{ mit } q \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd }, \\ 0, \text{ für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe 3 *(Dichte Teilmengen und Stetigkeit)*
Seien $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $f = g$, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *(Abstandsfunktionen)*
Die Abstandsfunktion einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\mathrm{dist}_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{dist}_M(x) = \inf\{|x - y| : y \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass dist_M Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$ ist.

Spielecke. Hier geht es noch einmal um Cantorartige Konstruktionen. Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge. Die *Cantorfunktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ wird in zwei Schritten wie folgt definiert:

1. Für $x \in C$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\, 3^{-i}$ mit $k_i \in \{0, 2\}$, ist $f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{2}\, 2^{-i}$.
2. Für $x \notin C$ ist dann weiter $f(x) := \sup\{f(\xi) : \xi \in C,\, \xi \leq x\}$.

Beweisen Sie die Abschätzung $|f(x) - f(y)| \leq 2\,|x - y|^{\log_3 2}$ und folgern Sie, dass die Cantorfunktion stetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 17.12.2001 bis 10:15.