MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

13.10.1997

Analysis III
WS 1997/98
1. Übung

AUFGABE 1:
Es sei $\{q_k\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$, und $I_k :=]q_k - 2^{-k}\varepsilon, q_k + 2^{-k}\varepsilon[\cap]0,1[$. Zeigen Sie, daß $I := \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ eine offene, beschränkte Menge ist, die nicht quadrierbar ist, wenn $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

AUFGABE 2:
Es sei $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\sum\limits_{x \in A} f(x)$ ist definiert und reell genau dann, wenn $\sum\limits_{x \in A} |f(x)| < \infty$.

(ii) Falls $\sum\limits_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R}$, so sind nur abzählbar viele $f(x)$ von Null verschieden.

(iii) Es sei $\sum\limits_{x \in A} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_i \subset A_{i+1} \subset A$ eine Folge mit $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Dann gilt $\sum\limits_{x \in A} f(x) = \lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{x \in A_i} f(x)$.

AUFGABE 3:
Zeigen Sie, daß sich jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als Vereinigung $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ von Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren schreiben läßt. Ist Ω zusammenhängend, so zeigen Sie weiter, daß die I_j so gewählt werden können, daß $\cup_{j=1}^{N} I_j$ für alle N zusammenhängend sind.

AUFGABE 4:
Das Cantorsche Diskontinuum ist definiert durch $C := \{a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \mid a_n \in \{0,2\}\} \subset [0,1]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) C ist abgeschlossen und hat keine inneren Punkte. Weiter ist jeder Punkt in C ein Häufungspunkt von C , d.h. C ist perfekt.

(ii) Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ sei der Operator $T(A) := \frac{1}{3}A \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A)$ definiert. Hier bedeutet $\frac{1}{3}A$ eine Streckung um den Faktor $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3} + A$ eine Verschiebung um $\frac{2}{3}$. Es sei $C_0 := [0,1]$ und $C_n := T(C_{n-1})$. Dann gilt $C_n \subset C_{n-1}$ und $C := \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.

(iii) Berechnen Sie die Intervallängen $|C_n|$, und zeigen Sie $|C_n| \to 0$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 20.10.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*