MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

7.1.1998

Analysis III
WS 1997/98
11.Übung

AUFGABE 41:
Es sei μ ein Maß, $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ nicht-negativ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie

$$\alpha \int_\tau^\infty t^{\alpha-1}\mu([f>t])\mathrm{dt} = \int_{[\mathrm{f}>\tau]} (\mathrm{f(x)}^\alpha - \tau^\alpha)\mathrm{d}\mu(\mathrm{x}).$$

Zeigen Sie dabei insbesondere, daß die Funktion $t \mapsto \mu([f>t])$ bezüglich des Lebesgue-Maßes meßbar ist. Dabei bezeichnet $[f>t] := \{x \mid f(x) > t\}$.

AUFGABE 42:

(i) Es sei $B \subset I\!R^{n-1}$ ein bezüglich des Lebesgue-Maßes meßbare Menge und $h > 0$. Der Kegel mit Höhe h zur Basis B ist definiert durch

$$K = K(B,h) := \{(y,t) \in I\!R^{n-1} \times I\!R \mid t \in [0,h], y \in (1-\frac{t}{h})B\}.$$

Zeigen Sie, daß K bezüglich des Lebesgue-Maßes meßbar ist, und daß

$$v_n(K) = \frac{h}{n} v_{n-1}(B).$$

(ii) Für $n+1$ linear unabhängige Punkte $a_0, \ldots, a_n \in I\!R^n$, d.h $a_n - a_0, \ldots, a_1 - a_0$ sind linear unabhängig, heißt $S = [a_0, \ldots, a_n] := conv(a_0, \ldots, a_n)$ der von $a_0, \ldots, a_n$ erzeugte n-Simplex, wobei *conv* die konvexe Hülle bezeichnet. Nach einer geeigneten Translation und Rotation kann ein n-Simplex als Kegel aufgefaßt werden, dessen Basis ein (n-1)-Simplex ist. Zeigen Sie, daß

$$v_n([a_0, \ldots, a_n]) = \frac{1}{n!}|det(a_n - a_0, \ldots, a_1 - a_0)|.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 12.1.1998, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*